7.5 多元函数微分学的几何应用

7.5.1 空间曲线的切线与法平面

7.5.2 曲面的切平面与法线

直线方程: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ (点向式)

平面方程: $Ax+By+Cz=D$ 点法式

复习:《线性代数与空间解析几何》

7.5 多元函数微分学的几何应用

7.5.1 空间曲线的切线与法平面

1 空间曲线由参数方程给出时

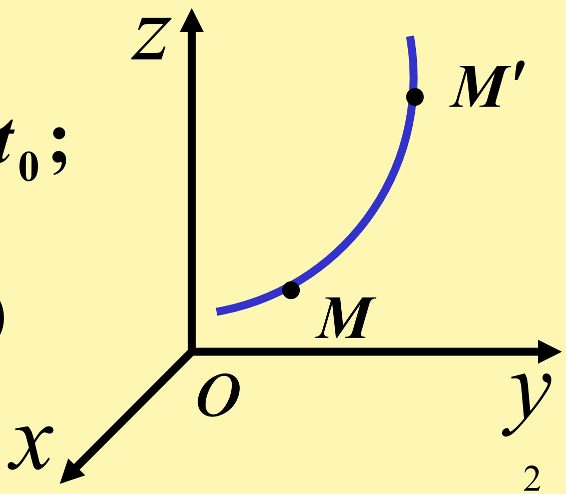
设空间曲线的方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ (1)

(1)式中的三个函数均可导.

设 $M(x_0,y_0,z_0)$,对应于 $t=t_0$;

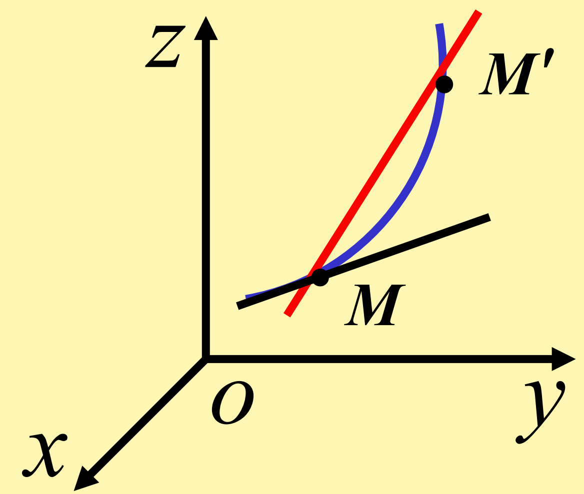
$M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

对应于 $t=t_0+\Delta t$.



割线 MM' 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$



割线趋近于极限位置

——切线

上式分母同除以 Δt,

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当 $M'\to M$, 即 $\Delta t\to 0$ 时,

曲线在M处的切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

$t = t_0$时, $M(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}.$$

注 上式中的分母不能全为零，如其中某一个分母为零，则相应的分子也为零.

切向量：切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{T} = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

法平面：过M点且与切线垂直的平面.

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

例1 求曲线Γ : $\begin{cases} x=\int_0^t e^u\cos u\,du \\ y=2\sin t+\cos t \\ z=1+e^{3t} \end{cases}$ 在$t=0$处的切线和法平面方程.

解 当$t=0, x=0, y=1, z=2,$

$$x'=e^t\cos t,\ \ y'=2\cos t-\sin t,\quad z'=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\quad x'(0)=1,\ \ y'(0)=2,\quad z'(0)=3,$$

切线方程 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3},$

法平面方程 $x+2(y-1)+3(z-2)=0,$

即 $x+2y+3z-8=0.$

特殊地：

1. 空间曲线方程为 $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$，在$M(x_0, y_0, z_0)$处,

$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ 切向量为：$\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$

切线方程为 $$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

法平面方程为

$$1 \cdot (x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

2　当曲线 由交面式方程给出时

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\quad(1)$$

点$M_0(x_0, y_0, z_0)$是Γ 上一点，又设F，G对各变量有连续偏导数，且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}=\left.\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}\right|_{M_0}\neq 0.$$

由本章第四节所讲隐函数存在定理3知，在M_0的某邻域确定了一组连续可导的函数

$$y=\varphi(x), z=\psi(x)$$

2　当曲线 由交面式方程给出时

思路:
$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\quad(1)\quad\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$$

点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是 Γ 上一点

(1) 式两端对x求导数解出 $\dfrac{dy}{dx},\ \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\psi'(x_0)$

切向量为：$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$

切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$,

法平面方程为

$$1\cdot(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0.$$

例 2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=\frac{z-x}{y-z}, \\ \frac{dz}{dx}&=\frac{x-y}{y-z}, \end{aligned}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0, \qquad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1,$$

$$\vec{T}=\{1,0,-1\},$$

例 2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

$$\vec{T}=\{1,0,-1\},$$

所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$,

即两平面的交线: $\begin{cases} x-1=-(z-1) \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程为 $(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0$,

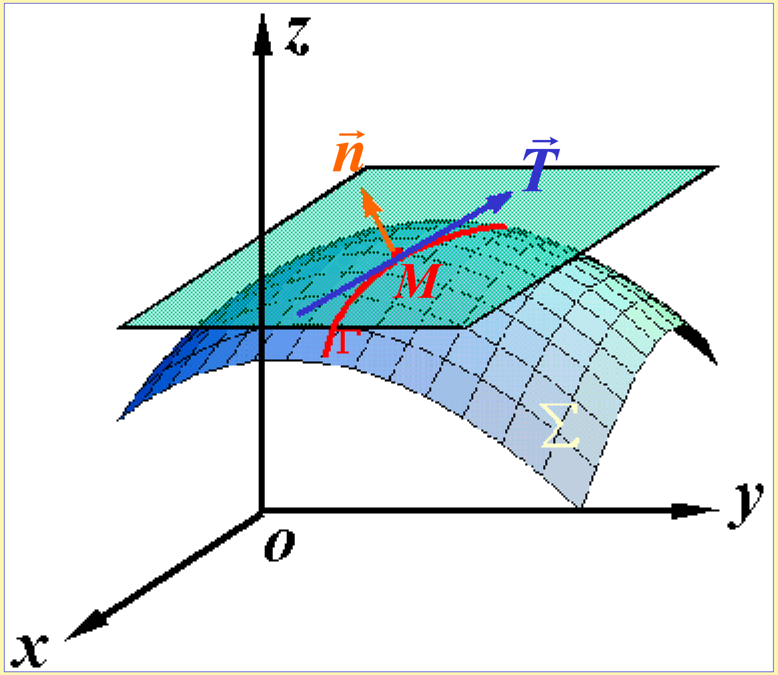
$$\Rightarrow \quad x-z=0$$

7.5.2 曲面的切平面与法线

1 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$

在曲面上任取一条通过点M的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases}$$



曲线在M处的切向量

$$\vec{T} = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

下证： 曲面Σ上过点M且具有切线的任何曲线，它们在点M处的切线都位于同一平面上.

曲线在M处的切向量 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

令 $\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

由于Γ 位于Σ上，所以 $F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0$

方程两端对t求导，有 $\dfrac{d}{dt}F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]_{t=t_0}=0$

即有 $\left.\left(F_x\cdot\dfrac{dx}{dt}+F_y\dfrac{dy}{dt}+F_z\dfrac{dz}{dt}\right)\right|_{t=t_0}=0$

$$F_x(M_0)\varphi'(t_0)+F_y(M_0)\psi'(t_0)+F_z(M_0)\omega'(t_0)=0$$

$$\vec{n}\cdot\vec{T}=0\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{T}$$

由曲线的任意性，$\vec{n}\perp$每一条曲线的切线

1 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

曲面Σ上过点M且具有切线的任何曲线，它们在点M处的切线都位于同一平面上，此平面称为曲面在 M处的切平面

$$\vec{n}\perp\vec{T},$$

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

1 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

过点M，且垂直于切平面的直线称为曲面$\sum$在M处的法线

法线与$\vec{n}$平行　　$\vec{n}$ 为法线的方向向量

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}$$

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

称为曲面Σ在点M处的一个法向量

求曲面的切平面与法线

1 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

法向量

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(M_0)}$

曲面方程 $F(x,y,z)=0$

在点$(x_0,y_0,z_0,)$处的法向量：

$$\vec{n}=\pm\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

比较：平面上的曲线方程 $F(x,y)=0$

在点(x_0,y_0)处的法向量：

在点(x_0,y_0)处切线的斜率：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

法线斜率：$\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$ 法向量为 $\pm\{1,\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}\}$

即：$\pm\{F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\}$

2　空间曲面方程形为 $z = f(x, y)$

令　$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$

法向量　$\vec{n} = \{f_x, f_y, -1\}_{M_0}$

或 $F(x, y, z) = z - f(x, y),$　$\vec{n} = \{-f_x, -f_y, 1\}_{M_0}$

曲面在M处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)\cdot(z - z_0) = 0$$

曲面在M处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

3　全微分的几何意义

曲面在M处的切平面方程为

$$\boxed{z-z_0}=\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

切平面上点的竖坐标的增量

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全微分

$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的全微分，表示曲面$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面上的点的竖坐标的增量.

4　曲面法向量的方向角、方向余弦

空间曲面方程 $z = f(x,y)$　令 $F(x,y,z) = z - f(x,y)$

$$\vec{n} = \{-f_x, -f_y, 1\}_{M_0} \qquad \vec{n^0} = \frac{\{-f_x, -f_y, 1\}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

方向余弦　$\cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos\beta = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$

$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，方向角　α，β，γ

$\cos\gamma > 0$，　法向量与 z 轴正半轴的夹角 γ 为锐角

法向量 $\vec{n} = \{-f_x, -f_y, 1\}_{M_0}$ 的方向是向上的

$\vec{n} = \{f_x, f_y, -1\}_{M_0}$ 的方向是向下的

思考1、如方程为$F(x, y, z)=0$时，如何求方向余弦？

如何判别方向余弦朝上、下？朝前、后？朝左、右？

法向量：$\vec{n}=\{F_x, F_y, F_z\}_{M_0}$ 若$F_z>0$,法向量朝上，反之朝下

若$F_x>0$,法向量朝前，反之朝后

若$F_y>0$,法向量朝右，反之朝左

2、如方程为$x=g(y, z)$时, 或$y=h(z, x)$时如何求法向量的方向余弦？

曲面方程：$x=g(y,z)$，法向量：$\vec{n}=\pm\{1,-g_y,-g_z\}_{M_0}$

正号表示朝前，负号表示朝后

曲面方程：$y=h(x,z)$，法向量：$\vec{n}=\pm\{-h_x,1,-h_z\}_{M_0}$

正号表示朝右，负号表示朝左

例 3 求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3,$

$$F'_x\big|_{(1,2,0)}=2y\big|_{(1,2,0)}=4,\quad F'_y\big|_{(1,2,0)}=2x\big|_{(1,2,0)}=2,$$

$$F'_z\big|_{(1,2,0)}=1-e^z\big|_{(1,2,0)}=0,$$

切平面方程 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0,$

$$\Rightarrow\quad 2x+y-4=0,$$

法线方程 $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

例 4 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程.

解 设 (x_0, y_0, z_0) 为曲面上的切点,

法向量 $\vec{n}=\{2x_0, 4y_0, 6z_0\}$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}, \quad \Rightarrow \quad 2x_0=y_0=z_0.$$

因为 (x_0, y_0, z_0) 是曲面上的切点

$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21 \qquad \therefore\ x_0=\pm 1,$$

所求切点为 $(1,2,2)$, $(-1,-2,-2)$,

例 4 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程.

解 法向量 $\vec{n}=\{1,4,6\}$

所求切点为 $(1,2,2)$, $(-1,-2,-2)$,

当 切点为 $(1,2,2)$ 时:

切平面方程(1) $1(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=21$$

当 切点为 $(-1,-2,-2)$ 时:

切平面方程(2) $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=-21$$

小结

本节主要讨论了多元函数的微分学在几何中的应用。

本节要求会求空间曲线的切线与法平面空间曲面的切平面与法线.

7.5.1 空间曲线的切线与法平面

1　空间曲线由参数方程给出时
$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

$t=t_0$时, $M(x_0,y_0,z_0)$处

切向量：$\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

切线方程：
$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面：过M点且与切线垂直的平面.

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

特殊地：

1. 空间曲线方程为 $\begin{cases} y = \phi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$，在$M(x_0, y_0, z_0)$处，

$$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$ 切向量为：$\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$

切线方程为 $$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

法平面方程为

$$1 \cdot (x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

2 当曲线 由交面式方程给出时

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\quad(1)\qquad\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$$

点$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$是Γ 上一点

（1）式等于两端对x求导数 解出 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$

切向量为：$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)},$$

法平面方程为

$$1\cdot(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0.$$

曲面的切平面与法线

1 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

法向量

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(M_0)}$

2　空间曲面方程形为 $z = f(x, y)$

令　$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$

法向量　$\vec{n} = \{f_x, f_y, -1\}_{M_0}$

曲面在M处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)\cdot(z - z_0) = 0$$

曲面在M处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$